◆テイラー展開と剰余項◆

この pdf の目的

- 平均値の定理を導けるようになる。
- 1 次・2 次のテイラー展開の式から剰余項の性質についての定理を示せるようになる。

1 平均値の定理

ここでは, 平均値の定理を証明することを試みる。まずは補題となる**ロルの定理**を示す。

1.1 Rolle (ロル) の定理

ロルの定理

$f(x)$ は区間 $[a,\ b]$ で連続で, $(a,\ b)$ で微分可能とする。このとき, $f(a) = f(b)$ ならば $a < c < b$ かつ $f'(c) = 0$ となる c が存在する。

【証明】

$f(a) = f(b) = k$ とする。もしも $f(x)$ が常に k ならば, この定理は自明である。

$f(x)$ が k より大きい値をとるとき, その中で最大の値を取る点を c, 最大値を $f(c)$ とする。このとき, $f(c) > k$ だから $a < c < b$ である。c の近傍の点を c' とすると, $\Delta f = f(c') - f(c) \leqq 0$ である。このとき, $\Delta x = c' - c$ として, $\Delta x < 0$ ならば $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} \geqq 0$ となり, $f'(c) \geqq 0$ が導かれる。同様に, $\Delta x > 0$ ならば $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} \leqq 0$ となり, $f'(c) \leqq 0$ が導かれる。よって, $f'(c) = 0$ が言える。

$f(x)$ が k 以下の値のみを取る場合は, 最小値で同様の考察を行えば良い。 ■

1.2 平均値の定理

平均値の定理

$f(x)$ は区間 $[a,\ b]$ で連続で, $(a,\ b)$ で微分可能とする。このとき, $a < c < b$ かつ $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ となる c が存在する。

【証明のためのアイディア】

ロルの定理と雰囲気が似た定理なので, ロルの定理の主張を満たすような関数を考える。

【証明】

ある定数 A を用いて, $g(a) = g(b) = 0$ となるように関数 $g(x) = f(x) - Ax$ を定める。これを満たす $A = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ である。

このとき, ロルの定理より $a < c < b$ かつ $g'(c) = 0$ となる c が存在する。ここで $g'(c) = f'(c) - A$ であるから, $a < c < b$ かつ $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ となる c の存在, すなわち定理の主張が示された。 ■

2 テイラー展開

最後の剰余項についての定理を示すために**テイラーの定理**を紹介する。

2.1 テイラーの定理

テイラーの定理

$f(x)$ は区間 $[a,\ a+h]$ で連続で, $(a,\ a+h)$ で n 階微分可能 (C^n 級の関数) とする。このとき, $0<\theta<1$ かつ 次の式を満たす θ が存在する：

$$f(a+h)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{h^k f^{(k)}(a)}{k!}+\frac{h^n f^{(n)}(a+\theta h)}{n!} \tag{1}$$

【注意】

この定理の証明は, 平均値の定理の証明と同様に行うことが可能である。また, 式が一見わかりづらいが,

- $n=1$ のとき, $f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta_1 h)$
- $n=2$ のとき, $f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\dfrac{h^2}{2}f''(a+\theta_2 h)$

と書けるというふうに主張しているのである。(後の便宜のために上記の式の変数 $\theta_1,\ \theta_2$ はそのまま用いる。) それぞれの多項式のうち, θ が含まれている項を**剰余項** という。また, 剰余項の極限値が 0, すなわち $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{h^n f^{(n)}(a+\theta h)}{n!}=0$ となるとき, 関数 $f(x)$ は **テイラー展開** (べき級数として関数を表現すること) が可能である。 ただし, そのべき級数の収束半径などについては別に議論する必要がある。

また, $n=1$ の時の式は平均値の定理の式の書換えとなっている。各自確かめてみよ。このことからも, テイラーの定理は平均値の定理の拡張であるということが分かる。

2.2 剰余項についての定理

最後に次の定理を証明する。

剰余項についての定理

$f(x)$ は区間 $[a,\ a+h]$ で連続で, $(a,\ a+h)$ で 2 階微分可能 (C^2 級の関数) とする。このとき, Taylor 展開によって

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta_1 h)$$

と表せ, $f''(a)\neq 0$ であれば,

$$\lim_{h\to 0}\theta_1=\frac{1}{2}$$

【証明】

先の【注意】の説明より

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta_1 h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a+\theta_2 h) \tag{2}$$

となる。 ここで第 2 式から 第 3 式を引くことにより, 次の式 (3) を得る。

$$h\{f'(a+\theta_1 h) - f'(a)\} - \frac{h^2}{2}f''(a+\theta_2 h) = 0 \tag{3}$$

ここで, 両辺を h^2 で割り, 整理すると

$$\frac{f'(a+\theta_1 h) - f'(a)}{h} = \frac{1}{2}f''(a+\theta_2 h) \tag{4}$$

となる。ここで, 左辺を変形すると,

$$\theta_1 \frac{f'(a+\theta_1 h) - f'(a)}{\theta_1 h} = \frac{1}{2}f''(a+\theta_2 h) \tag{5}$$

ここで, $h \to 0$ の極限をとると, $\theta_1 h \to 0$, $\theta_2 h \to 0$ であることに気をつけると,

$$(\lim_{h\to 0} \theta_1)f''(a) = \frac{1}{2}f''(a) \tag{6}$$

式 (6) の両辺を $f''(a)$ で割ることで, 定理の主張が示される。 ■

3 参考文献

[1] 高木貞治 (2010)『定本 解析概論』岩波書店。